Matemática dos Sopradores

https://gemini.google.com/app/23f85cae2b96e5cd

User prompt: descreva a matemática em desenho de soprador de ar com ventoinha

Response: O projeto matemático de um soprador de ar com ventoinha centrífuga envolve a integração de **aerodinâmica, cinemática de fluidos e geometria de pás**. O dimensionamento baseia-se nas equações fundamentais de turbomáquinas, relacionando vazão, pressão, rotação e geometria do rotor (*impeller*) e da carcaça (*volute*).

1. Parâmetros Globais de Entrada

Antes de traçar a geometria, definem-se as especificações operacionais:

- Q: Vazão volumétrica (m^3/s)
- ΔP_t: Aumento de pressão total desejada (Pa)
- N: Rotação por minuto (RPM)
- ρ: Massa específica do ar (kg/m^3, tipicamente $\approx 1.2\ kg/m^3$ ao nível do mar)

2. Triângulos de Velocidade (Cinemática do Escoamento)

O fluxo de ar através das pás é regido pela composição vetorial das velocidades na entrada (subscrito 1) e na saída (subscrito 2):

$$C = U + W$$

Onde:

- U: **Velocidade periférica** da pá (m/s), calculada como:

$$U = \frac{\pi \cdot D \cdot N}{60}$$

- W: **Velocidade relativa** do ar em relação à pá (m/s).
- C: **Velocidade absoluta** do ar no espaço (m/s).

Ângulos principais:

- β: Ângulo da pá (orientação física da lâmina).
- α: Ângulo absoluto do escoamento.

3. Equação de Euler para Turbomáquinas

A transferência de energia teórica por unidade de massa de ar é expressa pela equação de Euler, que relaciona o torque exercido pelo rotor com os componentes tangenciais da velocidade absoluta (C_u):

$$H_{th} = \frac{1}{g}(U_2 C_{2u} - U_1 C_{1u})$$

A **pressão estática e dinâmica teórica** gerada (ΔP_{th}) é:

$$\Delta P_{th} = \rho \cdot (U_2 C_{2u} - U_1 C_{1u})$$

Para pás curvadas para trás (*backward-curved*), comuns em sopradores eficientes:

- $C_{1u} \approx 0$ (entrada radial sem pré-rotação), simplificando para:

$$\Delta P_{th} = \rho \cdot U_2 C_{2u}$$

4. Sizing Geométrico do Rotor (Impeller)

Diâmetro de Saída (D_2) e Entrada (D_1)

O diâmetro externo do rotor é derivado do coeficiente de pressão adimensional (ψ) e do coeficiente de vazão (ϕ):

$$U_2 = \quad \frac{2 \cdot \Delta P_t}{\rho \cdot \psi}$$

Com U_2 determinado, o diâmetro de saída é:

$$D_2 = \frac{60 \cdot U_2}{\pi \cdot N}$$

O diâmetro de entrada (D_1) é dimensionado para limitar a velocidade de sucção ($C_1 \approx 15$ a $25\ \mathrm{m/s}$):

$$D_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot C_{1m}}$$

Largura das Pás (b_1 e b_2)

A conservação da massa através da área de fluxo ($A = \pi \cdot D \cdot b$) define a largura do rotor na entrada e na saída:

$$Q = \pi \cdot D_1 \cdot b_1 \cdot C_{1m} = \pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot C_{2m}$$

Onde C_m é a componente meridional (axial/radial) da velocidade.

5. Geometria da Carcaça (Voluta / Espiral)

A carcaça converte a alta velocidade cinética do ar que sai do rotor em pressão estática. O perfil espiral segue tipicamente a **lei de Arquimedes** ou uma **espiral logarítmica**.

O raio da voluta (R_θ) em função do ângulo polar (θ a partir da língua da voluta) é calculado como:

$$R_\theta = R_2 + K \cdot \frac{\theta}{2\pi}$$

Onde:

- R_2: Raio externo do rotor ($D_2/2$).
- K: Constante de expansão da voluta, dimensionada para manter a velocidade constante ou gradualmente decrescente ao redor do rotor para evitar perdas por atrito e turbulência.

6. Leis de Afinidade (Escalabilidade)

Para modificar um projeto existente mantendo a similaridade geométrica e dinamicamente proporcional:

Parâmetro	Relação com Rotação (N)	Relação com Diâmetro (D)
Vazão (Q)	$Q_2 = Q_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)$	$Q_2 = Q_1 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3$
Pressão (ΔP)	$\Delta P_2 = \Delta P_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$	$\Delta P_2 = \Delta P_1 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$
Potência (P)	$P_2 = P_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^3$	$P_2 = P_1 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5$

7. Perdas e Eficiência

A potência mecânica real no eixo (P_{eixo}) considera as perdas volumétricas, mecânicas (atrito em mancais) e hidráulicas/aerodinâmicas através da eficiência global (η):

$$P_{eixo} = \frac{Q \cdot \Delta P_t}{\eta}$$

As perdas aerodinâmicas internas são modeladas empiricamente por meio de coeficientes de arraste nas pás e perdas por choque na entrada quando o vetor de velocidade relativa W_1 não se alinha perfeitamente com o ângulo da pá β_1.

User prompt: plote um gráfico do desenho da carcaça

Response: Script em Python utilizando `matplotlib` para plotar a geometria da carcaça (voluta espiral) em relação ao rotor (*impeller*):

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Parâmetros de projeto
R2 = 100   # Raio externo do rotor (mm)
K = 25     # Taxa de expansão da voluta (mm por radiano/volta)

# Ângulo theta variando de 0 a 1.5 voltas (3*pi radianos)
theta = np.linspace(0, 1.5 * 2 * np.pi, 1000)
R = R2 + K * (theta / (2 * np.pi))

# Conversão para coordenadas cartesianas
x = R * np.cos(theta)
y = R * np.sin(theta)
```

```
# Configuração do gráfico
plt.figure(figsize=(7, 7))
plt.plot(x, y, label='Perfil da Voluta (Espiral)', color='#1f77b4', linewidth=2.5)

# Representação do Rotor (Impeller) no centro
impeller = plt.Circle((0, 0), R2, color='#ff7f0e', alpha=0.4, label='Rotor ($D_2$)')
plt.gca().add_patch(impeller)

# Linhas de referência e eixos
plt.axhline(0, color='grey', linewidth=0.8, linestyle='--')
plt.axvline(0, color='grey', linewidth=0.8, linestyle='--')

plt.title('Traçado Geométrico da Voluta de um Soprador Centrífugo', fontsize=12, fontweight='bold')
plt.xlabel('Eixo X (mm)', fontsize=10)
plt.ylabel('Eixo Y (mm)', fontsize=10)
plt.grid(True, linestyle=':', alpha=0.6)
plt.axis('equal')
plt.legend(loc='upper right')

# Exibição do gráfico
plt.show()
```

Explicação do Modelo:

1. **Rotor (R_2)**: Representado pelo círculo central em laranja, indicando o ponto de saída do fluxo de ar.
2. **Espiral de Arquimedes (R_θ)**: O raio aumenta linearmente à medida que o ângulo θ avança, criando a área de expansão progressiva necessária para converter a energia cinética em pressão estática antes da descarga.

User prompt: me mostre em svg

Response:

```
<svg xmlns="http://www.w3.org/2000/svg" viewBox="-200 -200 400 400" width="100%" height="100%">
  <style>
    .bg { fill: #1e1e2e; }
    .grid { stroke: #313244; stroke-width: 1; stroke-dasharray: 4,4; }
    .axis { stroke: #45475a; stroke-width: 1.5; }
    .volute { fill: none; stroke: #89b4fa; stroke-width: 3.5; stroke-linecap: round; }
    .impeller-outer { fill: #fab387; fill-opacity: 0.25; stroke: #fab387; stroke-width: 2; }
    .impeller-inner { fill: #f38ba8; fill-opacity: 0.3; stroke: #f38ba8; stroke-width: 1.5; }
    .blade { stroke: #fab387; stroke-width: 2; fill: none; stroke-linecap: round; }
    .tongue { fill: #f9e2af; stroke: #f9e2af; stroke-width: 2; }
    .diffuser { fill: rgba(137, 180, 250, 0.15); stroke: #89b4fa; stroke-width: 2.5; }
    .text { font-family: system-ui, -apple-system, sans-serif; font-size: 11px; fill: #cdd6f4; }
    .text-title { font-size: 14px; font-weight: bold; fill: #89b4fa; }
    .text-dim { font-size: 10px; fill: #a6adc8; }
    .flow-arrow { fill: none; stroke: #a6e3a1; stroke-width: 2; stroke-dasharray: 4,2; marker-end: url(#ar
  </style>

  <defs>
    <marker id="arrow" viewBox="0 0 10 10" refX="6" refY="5" markerWidth="6" markerHeight="6" orient="auto
      <path d="M 0 1 L 10 5 L 0 9 z" fill="#a6e3a1" />
    </marker>
  </defs>

  <!-- Fundo -->
  <rect x="-200" y="-200" width="400" height="400" class="bg" rx="12" />

  <!-- Eixos de Referência -->
  <line x1="-180" y1="0" x2="180" y2="0" class="axis" />
  <line x1="0" y1="-180" x2="0" y2="180" class="axis" />
  <circle cx="0" cy="0" r="50" class="grid" />
  <circle cx="0" cy="0" r="100" class="grid" />

  <!-- Carcaça (Voluta em Espiral de Arquimedes) -->
  <!-- R(theta) = R2 + K*(theta/2pi) | R2=70, K=35 -->
  <!-- θ=0: (70,0) -> θ=90: (0,-78.75) -> θ=180: (-87.5,0) -> θ=270: (0,96.25) -> θ=360: (105,0) -->
  <path d="M 70 0
           A 78.75 78.75 0 0 0 0 -78.75
           A 87.5 87.5 0 0 0 -87.5 0
           A 96.25 96.25 0 0 0 0 96.25
           A 105 105 0 0 0 105 0" class="volute" />

  <!-- Bocal de Saída (Difusor Retilíneo) -->
  <path d="M 105 0 L 105 -120 L 70 -120 L 70 -12" class="diffuser" />

  <!-- Língua da Voluta (Volute Tongue / Cut-off) -->
```

```
  <path d="M 70 0 C 68 -5, 68 -10, 70 -12" class="tongue" />

  <!-- Rotor (Impeller) -->
  <circle cx="0" cy="0" r="65" class="impeller-outer" />
  <circle cx="0" cy="0" r="25" class="impeller-inner" />

  <!-- Pás Curvadas para Trás (Backward-curved blades) -->
  <g class="blade">
    <path d="M 25 0 Q 40 20 65 0" />
    <path d="M 0 25 Q -20 40 0 65" />
    <path d="M -25 0 Q -40 -20 -65 0" />
    <path d="M 0 -25 Q 20 -40 0 -65" />
    <path d="M 17.68 17.68 Q 42.43 14.14 45.96 45.96" />
    <path d="M -17.68 17.68 Q -14.14 42.43 -45.96 45.96" />
    <path d="M -17.68 -17.68 Q -42.43 -14.14 -45.96 -45.96" />
    <path d="M 17.68 -17.68 Q 14.14 -42.43 45.96 -45.96" />
  </g>

  <!-- Indicadores de Fluxo de Ar -->
  <path d="M 40 -60 A 75 75 0 0 1 80 -20" class="flow-arrow" />
  <path d="M 87.5 -60 L 87.5 -105" class="flow-arrow" />

  <!-- Título e Legenda -->
  <text x="-180" y="-170" class="text-title">Geometria da Voluta e Rotor</text>
  <text x="-180" y="-153" class="text-dim">Perfil em Espiral: R(θ) = R₂ + K · (θ / 2π)</text>

  <!-- Anotações Geométricas -->
  <!-- R2 -->
  <line x1="0" y1="0" x2="65" y2="0" stroke="#fab387" stroke-width="1.5" stroke-dasharray="2,2" />
  <text x="30" y="-6" class="text" fill="#fab387">R₂</text>

  <!-- R_theta (Expansão) -->
  <line x1="0" y1="0" x2="-87.5" y2="0" stroke="#89b4fa" stroke-width="1.5" stroke-dasharray="2,2" />
  <text x="-55" y="-6" class="text" fill="#89b4fa">R(θ)</text>

  <!-- Língua da Voluta -->
  <text x="112" y="25" class="text" fill="#f9e2af">Língua da Voluta</text>
  <line x1="108" y1="20" x2="72" y2="-5" stroke="#f9e2af" stroke-width="1" stroke-dasharray="2,2" />

  <!-- Saída de Ar -->
  <text x="50" y="-135" class="text" fill="#a6e3a1" font-weight="bold">Saída de Ar (Q, ΔP)</text>
</svg>
```
